Communication de
Monsieur Gerhard HEINZMANN

Séance du 4 mai 2007

L'esthétique dans la démonstration mathématique

Résumé

Cet article défend la thèse suivante : le fonctionnement des mathématiques en tant que système symbolique requiert un versant esthétique au sens de Goodman. L'idée est de fournir des critères sémantiques et syntaxiques du fonctionnement esthétique et de montrer que les mathématiques, en tant que système symbolique, possèdent ces critères qui, en même temps qu'ils contribuent au potentiel esthétique, servent la cognition.

Nous donnerons une présentation synthétique des symptômes de l'esthétique de Goodman et en proposerons une interprétation dans un cadre mathématique. Nous montrerons par le biais de l'exemple de la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ que les modalités opératoires mathématiques standard se nourrissent de l'exploitation des symptômes de l'esthétique goodmanienne.

Préface

Nous souhaitons d'emblée placer notre propos dans le cadre de la politique universitaire locale, à savoir dans le cadre du projet ARTEM. En effet, il nous semble que ce projet ne devrait pas se réduire à une juxtaposition d'écoles, accompagnée d'une opération immobilière, mais devrait déboucher sur une nouvelle conception de la relation entre science, art et technique.

En ce sens nous nous trouvons au cœur du projet Artem en vous exposant une première esquisse d'une nouvelle conception entre esthétique et science.

Quelques-uns parmi vous vont se rappeler que l'Université Nancy 2 a décerné en 1996 le docteur *honoris causa* à l'un des plus grands philosophes du XX^{ème} siècle, à Nelson Goodman de Harvard.

Depuis cette époque, M. Heinzmann avait l'idée d'appliquer la théorie de l'esthétique de Goodman aux mathématiques. Aujourd'hui, sa doctorante Caroline Jullien, mathématicienne, a fait une percée remarquable dans sa thèse soutenue fin 2006 et dont nous vous présentons ici quelques extraits.

I. Introduction

La question des relations entre mathématiques et esthétique est généralement entendue sous l'angle du rôle que peuvent jouer les mathématiques dans des domaines artistiques. Tel est le cas par exemple lorsque l'on considère le soubassement mathématique d'une pièce musicale ou d'une œuvre picturale. Au niveau de la communauté mathématique, la question revêt une direction supplémentaire, celle qui concerne le rôle de l'esthétique au sein des mathématiques. En effet, il est bien connu que les mathématiciens aiment à défendre l'aspect esthétique de leur science : il est rare de ne pas trouver au détour d'écrits rétrospectifs, de textes de conférences publiques, d'ouvrages de vulgarisation mathématiques ou encore de discours honorifiques, une mention à la beauté de cette science, à l'élégance d'une théorie ou à l'harmonieuse symétrie de telle ou telle équation. Cependant, si attribuer des propriétés esthétiques aux mathématiques est un lieu commun largement entretenu par un grand nombre de mathématiciens, il est un autre topos qui se trouve également défendu : celui qui affirme que l'appréciation des propriétés esthétiques n'est pas une simple valeur ajoutée, un bonus qui viendrait en quelque sorte récompenser le labeur mécanique du mathématicien mais qu'au contraire la prise en compte de l'élément esthétique est nécessaire à la pratique mathématique. Poincaré, par exemple, considère que la sensibilité à l'esthétique des mathématiques est l'instrument de l'invention et de la compréhension.[1] Cette conception, loin d'être idiosyncrasique, est tout à fait représentative d'une large communauté de mathématiciens. Ainsi, de façon synthétique, la question de la dimension esthétique des mathématiques comporte deux facettes, l'une étant évaluative tandis que la seconde est fonctionnelle. La première facette de la question relève davantage *d'un point de vue* que l'on peut adopter selon des critères plus ou moins subjectifs en matière de goût et de préférences esthétiques que d'une thèse qu'il faudrait argumenter. En revanche, le second aspect, qui concerne l'attribution d'un rôle cognitif, nécessaire et fondamental, à la prise en compte de l'élément esthétique au sein des mathématiques, engage des questions philosophiques et épistémologiques puisqu'il porte sur le processus de fonctionnement des mathématiques et qu'il implique que la logique mathématique doit être complétée d'une approche esthétique. Ainsi, ce n'est pas finalement l'aspect évaluatif qui est préoccupant, il ne représente que la partie visible de l'iceberg. La thèse qui est alors défendue est que l'évaluation esthétique des mathématiques succède à un fonctionnement esthétique. Plus précisément : le fonctionnement des mathématiques en tant que système symbolique requiert un versant esthétique au sens de Goodman.

L'idée générale qui fonde l'argumentation de cette thèse consiste à montrer que les mathématiques, en tant que système symbolique, possèdent ou peuvent posséder, les critères sémantiques et syntaxiques du fonctionnement esthétique établi par Goodman et que ces critères, en même temps qu'ils contribuent au potentiel esthétique, servent la cognition. Avant d'illustrer cela par l'étude d'un exemple, il convient de justifier le choix de la théorie de l'esthétique de Goodmann comme outil d'analyse et d'en présenter les grandes lignes.

II. Goodman, les Langages de l'Art

Le fondement théorique de l'approche goodmanienne de l'esthétique est que l'expérience esthétique peut être reliée à l'expérience cognitive. Il n'y a là rien de novateur : le lien entre esthétique et cognition a été établi dès l'antiquité grecque. En fait, la relation établie par Aristote entre beauté et compréhension, ou en termes plus actuels, entre esthétique et cognition perdure jusqu'à la naissance de l'esthétique et connaît une rupture nette après la troisième critique de Kant. En effet, ce n'est qu'à la suite de Kant que s'instaure une distinction franche entre jugement esthétique et jugement de connaissance. L'émotion et la cognition s'excluent mutuellement. Cependant, dès le début du vingtième siècle, avec le développement de l'art conceptuel mais aussi avec la généralisation de l'abstraction mathématique, on observe un amoindrissement de cette exclusion : l'esthétique est à nouveau pensée comme un moyen de cognition. De nos jours, les plus importantes théories analytiques de l'esthétique remettent fortement en cause la séparation entre l'esthétique et la connaissance et elles plaident au contraire en faveur d'un lien étroit entre émotion et cognition. Parmi ces dernières, l'œuvre de Goodman occupe une place majeure.[2] L'aspect novateur de son approche de l'esthétique réside en cela qu'il analyse les propriétés syntaxiques et sémantiques des systèmes symboliques et fournit une caractérisation, fondée sur une approche symptomatologique, de ce qu'il appelle leur fonctionnement esthétique. Si une œuvre fonctionne en tant qu'œuvre d'art, c'est parce qu'elle remplit certains réquisits syntaxiques et sémantiques qui permettent un fonctionnement esthétique ; l'expérience esthétique est, dans la conception goodmanienne, une expérience dynamique. Goodman remplace la question «qu'est-ce que l'art ?» par la question «quand y a-t-il art ?». Ce faisant, il établit sa théorie en dehors du cadre habituellement réservé à l'esthétique, celui délimité par les beaux-arts. Le déplacement de l'analyse du mérite esthétique vers celle d'un fonctionnement esthétique et la conception cognitive de l'expérience esthétique sont deux points étroitement liés dans la théorie de Goodman. C'est parce l'esthétique y est conçue comme propriété cognitive que l'on peut parler de fonctionnement esthétique. Et l'analyse sémiotique du fonctionnement esthétique comme servant la cognition a, au moins, deux conséquences fondamentales par rapport à l'étude des rapports entre science et art. En effet, elle permet tout d'abord de réconcilier l'esthétique avec le cognitif, notamment en montrant que l'émotif et le cognitif ne s'excluent pas mutuellement. Cependant, si les émotions dans l'expérience esthétique servent la cognition, Goodman ne considère pas pour autant l'esthétique comme une activité strictement intellectuelle.[3] Elle permet ensuite d'élargir les domaines d'applications de l'esthétique, qui n'est plus alors réservée aux seuls domaines artistiques mais s'étend à l'ensemble des activités qui mettent en jeu des systèmes symboliques.[4]

L'approche sémiotique de l'esthétique de Goodman déplace ainsi les frontières entre la science et l'art. Non qu'il en fournisse une unification, mais il montre que leur différence n'est pas conséquente à la supposée opposition entre émotif et cognitif :

Même parmi les œuvres d'art et des expériences esthétiques d'une perfection évidente, la composante émotive est excessivement variable - disons, d'un Rembrandt tardif à un Mondrian tardif, ou bien d'un quatuor de Brahms à un autre de Werben. Le Mondrian et le Werben ne sont manifestement pas plus émotifs que les lois de Newton ou d'Einstein ; une ligne tracée entre l'émotif et le cognitif a toute chance de séparer moins nettement l'esthétique du scientifique que de séparer les uns des autres objets et expériences esthétiques.[5]

Ainsi, l'art donne en fait à Goodman l'occasion d'examiner le fonctionnement esthétique des systèmes symboliques et d'en fournir une description symptomatique générale. A ce titre, sa théorie de l'esthétique doit pouvoir être appliquée, ou confrontée, à des disciplines créatives qui mettent en jeu un langage symbolique. C'est ainsi que le choix de la théorie de Goodman pour analyser les mathématiques semble alors tout indiqué.

III. Symptômes de l'esthétique

Goodman procède à une analyse méthodique du fonctionnement des systèmes symboliques dont il extrait une liste de propriétés et de réquisits syntaxiques et sémantiques. Parmi ces dernières, il sélectionne celles qui distinguent le plus souvent, d'après lui, l'esthétique du non esthétique. Il retient cinq symptômes : la densité syntaxique, la saturation syntaxique relative, l'exemplification, la densité sémantique et la référence multiple et complexe. En vue de l'exemple qui va être traité, une présentation des quatre premiers symptômes sera suffisante.

Densité syntaxique

De façon intuitive, un système symbolique est syntaxiquement dense lorsque qu'il n'existe aucun moyen de recenser exhaustivement chaque caractère, qu'on ne peut les passer en revue ni les isoler les uns des autres. La densité syntaxique est l'apanage des systèmes picturaux, et elle est, au contraire, exclue de tout système linguistique. Il est, par exemple, impossible d'énumérer toutes les marques qui composent un tableau. Même en imaginant un tableau constitué de points isolés, il est impossible de décider dans quelle mesure les «blancs» ou espaces, qui séparent les marques n'en sont pas aussi. Alors qu'il est nécessaire que le schéma d'un système linguistique ne soit pas syntaxiquement dense. En effet, un système linguistique exige une grammaire et des règles de construction de caractères. Or, pour pouvoir appliquer une grammaire, il faut naturellement pouvoir identifier chaque caractère comme entité indépendante. Ce que ne permet pas la densité syntaxique.

En tant que propriété syntaxique, la densité permet donc d'avoir un discours rigoureux sur des systèmes, ou des schémas, symboliques qui ne peuvent répondre ni d'un alphabet ni d'une grammaire, mais qui n'en possèdent pas moins un fonctionnement syntaxique. Cette propriété permet en outre de rendre compte d'un fonctionnement symbolique particulier là où l'esthétique échoue habituellement :

L'impossibilité d'une détermination finie peut suggérer l'idée d'ineffabilité que l'on a si souvent revendiquée pour l'esthétique ou dont on lui a fait non moins souvent reproche. Mais la densité, loin d'être mystérieuse et vague, est explicitement définie ; elle dérive de l'exigence impossible à satisfaire d'une précision absolue, et elle la renforce.

Néanmoins, en tant que symptôme de l'esthétique, le choix de la densité syntaxique peut ne pas sembler judicieux dans la mesure où aucun système linguistique n'est syntaxiquement dense, et par suite aucune œuvre littéraire non plus. Mais un symptôme n'est pas un critère décisif, il n'est ni nécessaire ni suffisant de posséder la totalité des symptômes pour décider de la valeur esthétique.[6]

Saturation syntaxique relative

En introduisant la densité, Goodman permet une première classification entre les images et les non-images.[7] Les premières étant syntaxiquement denses tandis que les secondes ne le sont pas. Cependant, la densité syntaxique n'apparaît pas comme une condition satisfaisante pour caractériser les images dans la mesure où elle ne permet pas de faire de différence entre les images et les diagrammes, également syntaxiquement denses. Il y a pourtant une différence de fonctionnement ou de lecture entre ces différents systèmes symboliques : c'est la différence entre la dépiction et la description. Goodman suggère alors de raffiner la condition de dépiction en soulignant que parmi des systèmes également denses certains traits sont constitutifs pour les uns alors qu'ils sont contingents pour les autres. La saturation relative d'un système est ainsi la propriété qui caractérise les systèmes syntaxiquement denses dans lesquels aucun, ou très peu, des caractères ne peuvent être modifiés sans que cela ne modifie le fonctionnement du système. En ce sens, la saturation est un critère qui distingue les systèmes syntaxiquement denses qui dépeignent, de ceux qui décrivent (seuls quelques aspects ont une valeur constitutive et informative) :

Comparez un fragment d'électrocardiogramme avec un dessin du Mont Fuji-Yama par Hokusai. Les lignes noires en zigzag sur des fonds blancs peuvent être exactement les mêmes dans les deux cas. Cependant l'un est un diagramme et l'autre une image ; qu'est-ce qui fait la différence ? […] La réponse ne réside pas dans ce qui est symbolisé ; on peut faire des diagrammes de montagnes, et des images de battements de cœur. La différence est syntaxique : les aspects constitutifs du diagrammatique, en tant qu'on les compare avec le caractère imagé, sont l'objet d'une restriction expresse et étroite. Les seuls traits pertinents du diagramme sont l'ordonnée et l'abscisse de chacun des points que traverse le centre de la ligne. L'épaisseur de la ligne, sa couleur et son intensité, la grandeur absolue du diagramme, etc., n'importent pas. […] Cela n'est pas vrai de l'image; tout empâtement ou affinement de la ligne, sa couleur, son contraste avec le fonds, sa taille, voire les qualités du papier - rien de tout ceci n'est écarté, rien ne peut-être ignoré.[8]

La saturation d'un système se mesure ainsi au nombre, si l'on peut dire, des aspects non contingents de ses éléments. La démarche de Goodman en établissant les propriétés de densité et de saturation n'est pas de fournir un moyen de déterminer ce qui ferait *l'essence* d'une image mais de donner les moyens de répondre à la question «*quand y a-t-il image ?*» puisqu'un même symbole peut être une image dans un système et un diagramme dans un autre. La différence entre une image et un diagramme n'est pas une différence strictement syntaxique mais réside dans des modes de fonctionnement symbolique différents.

Exemplification

On distingue deux sortes de référence : la dénotation et l'exemplification. La dénotation va d'un prédicat vers un objet auquel on peut appliquer ce prédicat. Pour qu'un prédicat dénote un objet, il suffit qu'il s'applique à ce dernier. Par exemple, toute inscription de «rouge» dénote les objets rouges. La dénotation n'exige pas la possession, c'est-à-dire qu'il n'est pas nécessaire que le prédicat possède les propriétés qu'il dénote. Une inscription de «rouge» n'a pas besoin d'être écrite en rouge pour dénoter les objets rouges. Par contre, si tel est le cas, c'est-à-dire une inscription de rouge écrit en rouge, on peut dire que le prédicat se dénote lui-même. On parlera alors de symbole auto-dénotant. Par exemple, «monosyllabe» ou bien «court» dénotent tous les mots courts mais le premier n'est pas, à l'inverse du second, auto-dénotant.

L'exemplification se distingue de la dénotation par sa direction : elle va de l'objet vers le prédicat. C'est-à-dire que c'est l'objet qui exemplifie un prédicat qui s'y applique. Alors qu'un signe strictement dénotatif ne possède pas nécessairement ce qu'il désigne, un signe exemplificationnel doit obligatoirement posséder ce qu'il exemplifie. Mais ce n'est pas pour autant qu'un objet exemplifie tous les traits qu'il possède. Une inscription de «rouge» écrit en bleu dénote tous les objets rouges mais n'exemplifie pas le prédicat «être rouge» alors qu'elle peut exemplifier «être une inscription de «rouge»» ou encore le prédicat «être bleu», sous réserve qu'il y soit fait référence. Si tel n'est pas le cas, c'est-à-dire si un objet possède effectivement une propriété sans toutefois y faire référence, on parlera alors d'*instanciation* plutôt que d'exemplification. Une instance d'un prédicat ou d'une étiquette est ainsi un objet auquel le prédicat s'applique sans qu'il y ait référence de l'objet vers le prédicat. C'est la possession qui permet de marquer la différence entre un exemplaire, (ou un échantillon), et une instance (ou un cas). Un carré de tissu est une instance de quelque chose de carré et c'est un échantillon pour le tailleur (couleur, motif ou texture par exemple).

On ne doit pas penser que l'on peut procéder à un découpage net et définitif des systèmes symboliques en dénotatif et exemplificationnel. Cette différence d'orientation référentielle dépend, la plupart du temps, de tranches spatio-temporelles. Le fonctionnement référentiel des différents symboles usuels est justement déterminé par l'usage et l'habitude. Mais rien n'interdit d'en modifier l'orientation : un carnet d'échantillons de tailleur fonctionne habituellement comme système exemplificationnel, chacun des morceaux de tissu exemplifie sa couleur, sa texture, etc. Mais l'on peut aussi s'en servir pour montrer ce qu'est un échantillon de tailleur.

Densité sémantique

La densité sémantique est de façon naturelle le pendant sémantique de la densité syntaxique. De façon intuitive, la densité sémantique caractérise les systèmes symboliques dans lesquels les objets peuvent exemplifier une multitude indéfinie de prédicats, ces derniers ayant eux même des classes-de-concordance multiple et non disjointes. Ainsi, par exemple, tous les objets verts examinés à ce jour exemplifient l'inscription «objet vert», mais tous exemplifient également «objet vert examiné à ce jour ou kangourou» et une multitude indéfinie d'autres prédicats.[9]

La non-disjointure des classes-de-concordance permet de traduire le phénomène interprétatif qui accompagne usuellement les systèmes symboliques ayant un fonctionnement esthétique :

L'impossibilité d'une détermination finie peut suggérer l'idée d'ineffabilité que l'on a si souvent revendiquée pour l'esthétique ou dont on lui a fait non moins souvent reproche. Mais la densité, loin d'être mystérieuse et vague, est explicitement définie ; elle dérive de l'exigence impossible à satisfaire d'une précision absolue, et elle la renforce.[10]

En résumé, la densité sémantique caractérise les systèmes dans lesquels les classes-de-concordance sont telles que l'on ne peut atteindre simultanément un maximum de généralité et de précision. Elle traduit, en tout cas pour les systèmes discursifs, l'impossibilité d'atteindre une précision absolue. La densité sémantique se traduit dans les faits par une latitude d'interprétation illimitée.

De la même manière que la densité syntaxique, la densité sémantique n'est pas toujours effective pour le bon fonctionnement d'un système. Elle y est parfois contingente et d'autres fois constitutive. Par exemple, dans le système exemplificationnel constitué d'un carnet d'échantillons de peinture ou de tissu, la densité sémantique n'est pas effective puisque, quand bien même chaque morceau de tissu ou chaque couleur reproduite pourrait être mis en relation avec une multitude de classes-de-référence, l'interprétation correcte ne dépend de la prise en compte que de quelques aspects déterminés par l'usage approprié. Un échantillon de tissu, utilisé en tant que tel, exemplifie habituellement sa couleur, son motif ou sa texture. Qu'il puisse exemplifier en outre le fait d'être un carré par exemple, n'intervient pas dans son fonctionnement d'usage. En revanche, la couleur de la cape du petit chaperon rouge fait référence à une multitude de prédicats dont on ne peut négliger l'influence sur la lecture et la compréhension du conte.

IV. L'esthétique dans la démonstration de l'irrationalité de √2

La fréquence avec laquelle la démonstration de l'irrationalité de √2 est citée pour illustrer la beauté des mathématiques semble être une raison suffisante pour prendre cette démonstration comme exemple d'application de l'outil goodmanien.

Prenons comme base la démonstration classique[11] de ce résultat :

Un nombre rationnel est une fraction a/b, où *a* et *b* sont des entiers ; nous supposerons que *a* et *b* n'ont pas de facteur commun, puisque, dans le cas contraire, celui-ci peut être éliminé. Affirmer que «√2 est irrationnel» revient simplement à dire que

√2 ne peut être écrit sous la forme (*a/b*). Donc que l'égalité:

(A) $\sqrt{2} = a/b$

ne peut pas être satisfaite avec *a* et *b* deux nombres entiers sans facteur commun.

Soit encore, que l'équation

(B) $a^2 = 2b^2$

ne peut être satisfaite par deux nombres entiers a et b sans facteur commun. Ceci est un théorème de pure arithmétique, qui ne fait appel à aucune connaissance sur les «nombres irrationnels» et ne dépend d'aucune théorie concernant leur nature.

Raisonnons par l'absurde : supposons que (B) soit vérifiée, *a* et *b* étant deux nombres entiers sans facteur commun. Il s'ensuit de (B) que a^2 est pair (puisque $2b^2$ est divisible par 2), et donc que *a* lui-même est pair (le carré d'un nombre impair étant lui-même impair). Si *a* est alors pair,

(C) $a = 2c$

pour un entier *c* ; et donc

$$2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2$$

soit

(D) $b^2 = 2c^2$

Ainsi b^2 est pair et donc (pour les mêmes raisons que précédemment) *b* est pair. *a* et *b* sont donc tous deux pairs, et ont donc comme facteur commun 2. Ceci contredit notre hypothèse, et celle-ci est donc fausse.

L'étape charnière, ou la clé, de la démonstration consiste en l'écriture de l'équation B, ou plutôt de la phrase relationnelle B. En fait, les phrases A et B sont équivalentes, c'est-à-dire qu'elles ont la même valeur de vérité pour tout *a* et *b*, et elles sont deux représentations de la même équation. Mais, la relation interne entre les termes singuliers *a*, *b* et √2 peut être lue d'une part comme instanciation du terme général '=' (phrase A) et d'autre part comme exemplification du prédicat "être pair" (phrase B),[12] et c'est ce que l'on cherche.

La plupart de démonstrations mathématiques procèdent de façon similaire. À grands traits, ce procédé consiste à faire passer un objet mathématique (une équation, une fonction, etc.) du statut d'instance à celui d'échantillon.[13] Si l'on appelle H l'étiquette que l'on peut fabriquer à partir des hypothèses d'une proposition mathématique et C celle qui correspond à la conclusion de cette proposition alors le processus de vérification de la proposition peut être schématisé de la façon suivante : on sélectionne un objet tel que H *s'y applique* et l'on transforme l'objet à l'aide de règles valides de façon à rendre explicite la *possession* de C par l'objet. La première étape est ainsi une question de *dénotation* (il s'agit de choisir n'importe quel objet du moment qu'il est dénoté par H) tandis que la seconde étape est une affaire d'exemplification (il s'agit de choisir parmi les écritures possibles celles qui *exemplifient* C).[14]

Les transformations qui permettent le passage du statut d'instance de H à celui d'échantillon de C sont des implications logiquement formalisables. Ce qui n'est pas le cas de leurs articulations et enchaînements, qui relèvent plus d'un choix stratégique et de règles de simplification tacites. Que faut-il entendre par règles de simplification ?

La réponse peut être fournit par l'étude de l'enchaînement d'étapes qui conduit de l'écriture de la phrase A à celle de B :

$\sqrt{2} = a/b$

$\sqrt{2} \text{ x } b = a$

$a = \sqrt{2} \text{ x } b$

$(a)^2 = (\sqrt{2} \text{ x } b)^2$

$a^2 = 2\, b^2$

Toutes les implications qui conduisent de la première à la dernière écriture sont logiquement formalisables. Par contre, aucun des passages de l'une à l'autre n'est imposé par la logique. Le déroulement, l'articulation de ces écritures répond à des règles tacites. Ainsi par exemple, le passage de la première à la seconde écriture est conséquent au principe selon lequel il est plus aisé de manipuler une expression qui ne comporte pas d'écriture fractionnelle. Le deuxième enchaînement traduit pour sa part une habitude qui veut que l'on écrive une égalité en notant plutôt à gauche l'expression la plus courte, qui comporte le moins de symbole possible.

Le passage suivant traduit l'habitude selon laquelle il est plus aisé de manipuler une expression sans racine que le contraire. Enfin, la dernière écriture réorganise l'égalité de façon à mettre un seul terme à gauche.

Il est bien connu[15] que l'on ne comprend pas une démonstration si on la suit pas à pas sans comprendre les critères de choix déterminant l'ordre des enchaînements. La question qui se pose alors est de savoir si ces règles particulières (ce ne sont pas vraiment des règles, plutôt des conventions commodes) ne sont pas ce qui permet de déterminer des critères de simplicité. La question devient donc de savoir dans quelle mesure peut-on évaluer la simplicité formelle des règles extralogiques.

Les démonstrations mathématiques sont rarement rédigées selon la pure rigueur que pourrait exiger la logique. Ceci ne signifie pas qu'elles présentent des erreurs logiques et ne remet pas en cause leur validité. Une preuve peut être correcte, valide, quand bien même serait elle rédigée de façon non strictement formelle : la rédaction d'une démonstration comporte la plupart du temps des raccourcis commodes. Chaque étape qui constitue une preuve n'a pas nécessairement besoin d'être explicitée, soit parce qu'elle fait appel à un résultat connu, soit parce que le rédacteur suppose une certaine compétence chez son lecteur, qui lui permet d'omettre des détails qui semblent évidents.

On peut en fait montrer, dans le cadre d'une interprétation goodmanienne des modalités opératoires mathématiques, que la simplicité formelle atteinte avec les règles extralogiques se traduit en termes de saturation. Ce qui offre de rendre effectif le lien entre l'esthétique et la simplicité.

C'est au niveau du rapport entre organisation syntaxique et fonctionnement du système que l'on peut situer l'interprétation du symptôme de saturation syntaxique. En effet, l'une des différences entre les mathématiques, en tant que système symbolique, et un système linguistique quelconque tient en cela que dans le premier cas, les règles de combinaison des symboles entre eux tolèrent une plus grande latitude que dans le second cas. Dans le cas des systèmes linguistiques, la règle qui prévaut est la concaténation linéaire. Dans le cas des mathématiques, on combine les symboles entre eux suivant diverses lois, ou grâce à des opérateurs. Ces derniers ayant des propriétés qui permettent plusieurs écritures différentes pour un même objet. Par exemple, dans le corps des réels **R**, un polynôme P(x) peut être représenté par x^4+9x^5-12, par $-12+x^5$ $9+x^4$ ou encore de multiples façons obtenues grâce à la commutativité et la symétrie de la multiplication et de l'addition dans **R**.

Dans un système purement linguistique, la latitude pour choisir un représentant syntaxique se situe au niveau de la marque, au sens goodmanien. Ce choix n'a pas de conséquence sur le fonctionnement du système. En mathématiques, la latitude est plus large, et l'on peut choisir, outre la marque, l'organisation des symboles entre eux. Cette organisation syntaxique, comme on l'a vu dans la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, est susceptible d'avoir une fonction exemplificationnelle. Si l'on modifie l'organisation, on modifie l'exemplification et on modifie donc le fonctionnement général de la démonstration. C'est donc au niveau du rapport entre organisation syntaxique et fonctionnement du système que l'on peut situer l'interprétation du symptôme de saturation syntaxique. On dira alors qu'une écriture est saturée si l'on modifie la marche du raisonnement en modifiant son organisation syntaxique. Dans un système (mathématique) saturé, le nombre de caractéristiques syntaxiques qui fonctionnent symboliquement est d'autant plus élevé que l'ordre et le choix des combinaisons pour l'écriture comptent. Une conséquence est alors que si le nombre de caractéristiques qui fonctionnent symboliquement est élevé, les caractéristiques contingentes sont par suite peu nombreuses. Il y a donc, dans une écriture saturée, une sorte d'élimination du superflu. C'est à cause de ce dernier point qu'il est envisageable d'établir la saturation comme un critère possible de la simplicité : une écriture est plus simple qu'une autre si elle est plus saturée. Cette caractérisation de la simplicité ne contredit pas le sens commun qui veut que, de façon générale, on trouve plus simple quelque chose qui ne présente pas de complication de détail inutile.

La simplicité ainsi circonscrite est bien évaluée au niveau syntaxique, puisqu'elle concerne l'arrangement des symboles entre eux. Autrement dit, la simplicité entendue comme corollaire de la saturation se mesure bien au niveau du codage mathématique.

Les symptômes identifiés pour la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ sont l'exemplification et la saturation. L'un et l'autre ne sont pas indépendants : au sein de cette démonstration, la fonction exemplificationnelle de l'écriture de la phrase B est permise par son aspect saturé. C'est la combinaison des deux symptômes qui justifie le mérite esthétique de la démonstration plutôt que leur présence individuelle.

V. Conclusion

L'identification de la construction d'une démonstration suppose que l'on parvienne à identifier quelles sont les propriétés des objets auquel il est fait référence pour la conduite du raisonnement. En termes goodmaniens, il s'agit donc non pas de connaître de façon exhaustive l'ensemble des étiquettes qui s'appliquent à un objet (c'est à dire, toutes les étiquettes qui dénotent l'objet) mais il faut pouvoir distinguer parmi celles-ci, celles envers lesquelles il est fait expressément référence ; autrement dit, celles qui sont exemplifiées par l'objet au cours de la démonstration. La construction reste en quelque sorte invisible tant que l'on n'identifie pas la direction des chaînes référentielles qui relient les différentes étapes du raisonnement. C'est-à-dire qu'il faut, pour y avoir accès, savoir repérer le statut référentiel, exemplificationnel ou dénotatif, des objets en jeu. On peut trouver ici une explication analytique du problème évoqué par Poincaré par rapport au fait qu'il ne suffit pas de comprendre pas à pas les étapes d'une démonstration pour la comprendre véritablement (i.e. pouvoir la refaire ou la réutiliser ailleurs) encore faut-il en saisir l'ordre et la raison des enchaînements.[16] En effet, la solution, ou l'explication qu'en donne Poincaré est la nécessité de travailler en artiste, de s'élever afin de parvenir à distinguer les éléments contingents de ceux qui jouent un rôle. Il s'agit pour lui de se placer sous une perspective d'ordre et non pas dans une démarche de calcul strictement logique. L'outil fournit par Goodman permet de traduire cela dans une approche sémiotique de la théorie de la référence : la compréhension véritable (au sens poincaréen) d'une démonstration passe par une identification de sa construction qui elle-même est permise par l'identification du statut référentiel de chacun des éléments qui la composent. En ce sens, on peut d'ores et déjà dire que la compréhension véritable d'une démonstration nécessite que l'on sache la faire fonctionner esthétiquement, puisque l'attention ne doit pas être porter sur sa seule fonction dénotative mais aussi, et surtout, sur ce qu'elle exemplifie. Ceci est la traduction goodmanienne de l'injonction de Poincaré : *il faut travailler en artiste*.

Notes

[1] Cf. Poincaré H., 1905, *La Valeur de la science,* Paris : Flammarion 1970, pp. 35-37 et Poincaré H., 1908, *Science et méthode,* Paris : Kimé, 1999, pp.45-53 &128.

[2] Jacques Morizot écrit par exemple :

«On crédite habituellement Nelson Goodman - R. Wollheim et d'autres l'ont explicitement reconnu - d'avoir été chez les philosophes le principal avocat d'un tournant ou, comme il aime à le dire, d'une réorientation de l'analyse en direction de l'art. (…) Tout au long de notre siècle en effet et jusque dans les année récentes, l'esthétique anglo-saxonne a été de façon dominante *a philosophy of criticism* c'est-à-dire, dans les termes de Beardsley, une enquête sur « la signification et la vérité des énoncés critiques». Contre l'omniprésence du discours justificatif et contre l'expérience massive du Beau, Goodman entreprend au contraire de redécouvrir l'esprit de finesse des connaisseurs du XVIIIème siècle en l'appliquant cette fois à l'examen de la compétence symbolique ». (Morizot, J., 1997, L'Art de la symbolisation, Philosophia Scientiae 2(2) : pp.166-167).

On pourra aussi lire l'article de Elgin : Relocating Aesthetics : Goodman's Epistemic Turn (cf. Elgin, C., 1997, *Nelson Goodman's Theory of Symbols and Its Applications,* New York : Gartland Publishing).

[3] «Dans l'expérience esthétique l'émotion est un moyen de discerner quelles propriétés une œuvre possède et exprime. Dire ceci c'est inviter à dénoncer vigoureusement une froide sur-intellectualisation ; mais il s'agit moins de déposséder ici l'expérience esthétique des émotions que d'en doter l'entendement. Le fait que les émotions soient partie prenante dans la démarche cognitive n'implique pas davantage qu'elles ne sont pas ressenties que le fait que la vision nous aide à découvrir les propriétés des objets implique qu'il ne se produit pas de sensations-de- couleur. Il ne fait pas de doute que les émotions doivent être ressenties - c'est-à-dire qu'elles doivent se produire, tout comme les sensations - si on doit en faire usage cognitivement. L'usage cognitif suppose leur différentiation et leur mise en rapport afin de jauger et de saisir l'œuvre, et de l'intégrer au reste de notre expérience et au monde extérieur. S'il est l'opposé d'une absorption passive dans les sensations et les émotions, il ne revient en aucune façon à les annuler. Et il explique les modifications que peuvent subir les émotions dans l'expérience esthétique». Goodman N., 1968, *Langages de l'art,* (LA), Nîmes: Chambon, pp. 291.

[4] «Le projet de Goodman [...] s'interdit de remonter aux sources existentielles ou culturelles de la créativité ou de dévoiler le sens dernier de l'art, et [il] s'en tient seulement à expliciter, derrière la diversité et le chatoiement des apparences, la régularité des opérateurs sémiotiques et logiques qui les sous-tendent pour espérer en tirer quelques conclusions de portée plus générale. [...] De simple occasion, l'art devient laboratoire pour une vision élargie de la symbolicité et de l'humanité, guide d'une géographie de l'esprit que ses devanciers abordaient de préférence à partir de l'épistémologie ou de la psychologie». (Morizot, J., 1996, *La philosophie de l'art de Nelson Goodman,* Nîmes : Chambon, pp.14).

[5] LA, 287-289.

[6] LA, 295-296

[7] «[...] la classification quotidienne des symboles qui distingue les images des non-images est étroitement apparentée à la frontière qui sépare les symboles appartenant à un système dense ou «analogique» et ceux qui appartiennent à un système de différentiation finie ou «digital». Il se peut que le fait d'être analogique passe pour une condition nécessaire de la dépiction, mais il ne s'agit pas d'une condition suffisante». (Goodman, N. & Elgin C., 1988, *Reconceptions en philosophie dans d'autres arts et dans d'autres sciences,* Paris : PUF, 1994, pp 131.)

[8] LA 273.

[9] LA, 241.

[10] LA, 295-296.

[11] Cette démonstration est la plus classique, celle que l'on trouve habituellement dans les manuels mathématiques. Elle est, écrit Hardy, attribuée à Pythagore mais il précise que l'on peut la trouver sous une forme beaucoup plus générale dans Euclide Eléments X, 9 (cf. Hardy G.H,

1940, *L'Apologie d'un mathématicien,* Paris : Belin 1985, pp.28.).
Pour une étude détaillée des différentes démonstrations, on pourra se reporter à Vuillemin, J., 2001, *Mathématiques pythagoriciennes et platoniciennes,* Paris : Blanchard.

[12] En effet, la phrase B exhibe la parité de a (plus exactement, la parité de a^2). L'écriture de a^2 comme étant égale à $2b^2$ fournit une référence directe, on pourrait même dire canonique, entre a^2 et l'une des étiquettes possédées par ce nombre, à savoir «être pair». La nature de la référence entre cette étiquette et a^2 est, dans la phrase A, une dénotation, alors que dans la phrase B, c'est une exemplification puisque dans ce cas il y a possession et référence.

[13] Dans le langage goodmanien, une instance d'une étiquette est quelque chose à laquelle s'applique cette étiquette. Un échantillon est quelque chose qui possède manifestement cette étiquette. La différence entre la relation qui unit une étiquette avec une instance et celle qui unit une étiquette avec un échantillon est une différence d'orientation. Dans le premier cas, il s'agit d'une référence qui va de l'étiquette vers l'instance alors que dans le second cas, la référence va de l'échantillon vers l'étiquette.

[14] Ce procédé s'apparente aux diagrammes de Peirce, pour plus de détail voir Heinzmann, G. Mathematical Reasoning and Pragmatism in Peirce, in : D. Prawitz & D. Westerstahl (éds.), *Logic and Philosophy of Science in Uppsala,* Dordrecht :/ Boston/LondonKluwer, 1994, pp.297-310.

[15] Poincaré H., 1908, *Science et méthode,* Paris : Kimé, 1999, pp.46., Hadamard, J., 1945, *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique,* Paris : Gauthier-Villars 1975, pp. 67.

[16] Poincaré H., 1908, *Science et méthode,* Paris : Kimé, 1999, pp.46.

[17] Poincaré, H. 1905, *La Valeur de la science,* Paris : Flammarion 1970, pp. 106.

Cette communication a été réalisé avec la collaboration de Caroline JULLIEN, Département de philosophie, Laboratoire d'Histoire des Sciences et de Philosophie - Archives Henri-Poincaré, UMR 7117 CNRS/Nancy-Université